III Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática
6 a 8 de novembro de 2008
ISBN 978-85-7891-007-5

A PRIMEIRA EXPERIÊNCIA COM A MODELAGEM MATEMÁTICA – A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO

Carlos Roberto Ferreira
Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO
carlosferreira@unicentro.br

Dionísio Burak
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
dioburak@yahoo.com.br

RESUMO
Este relato objetiva demonstrar, através da primeira experiência de um professor de Matemática com a Modelagem Matemática, como é possível a aprendizagem matemática de forma contextualizada e mais significativa para os alunos. Descreve, inicialmente, as dificuldades e angustias de um recém formado em Matemática. Inserido em um contexto social, também descreve o processo de (re)construção de um modelo matemático do ponto de vista cognitivo. Por fim, apresenta reflexões sobre alguns aspectos práticos e teóricos em relação à Modelagem Matemática.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática, Modelagem Matemática, Construção de Modelos.

INTRODUÇÃO

O acontecimento relatado a seguir, referente à uma experiência envolvendo Modelagem Matemática, ocorreu em 1990 em um curso de pós-graduação em Educação Matemática. Contudo, antes de relatar a experiência propriamente dita, apresento, na seqüência, um breve histórico dos acontecimentos que antecederam-na.

Era um dos formandos em Matemática, da turma de 1987, da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Arapongas, e o momento era de alegria para todos os presentes, com sentimento de missão cumprida. E, enquanto aguardava a entrega do diploma, sentia-me angustiado com pensamentos do presente e do futuro.

Já tinha alguma experiência, pois ensinava Matemática há dois anos para uma turma de 8ª série. Comecei a fazer uma retrospectiva da minha prática como professor de Matemática, dos resultados alcançados e, com isso, uma 'ponta' de preocupação começava a se fazer presente. Naquela semana houve um Conselho de Classe em que, de uma turma de 40 alunos, 10 reprovaram em Matemática. No momento não me preocupei porque ouvi dos professores vários comentários: 'não se preocupe, isso é normal'; 'Matemática é assim mesmo, muito difícil'; 'com essa nota tem que reprovar mesmo'; 'se não prestar bem atenção e não fazer as listas de exercícios não se aprende matemática'; 'este aluno vai bem nas humanas, mas nas exatas é um desastre, ele não sabe tabuada, não tem raciocínio'; entre outros.

Mas algo me chamou a atenção, o semblante de um colega professor com mais tempo de magistério, ocorreram 13 reprovações em Matemática na sua turma e, ele parecia orgulhoso e realizado, como se aquelas reprovações fossem mesmo o seu objetivo. Sorridente, aparentava superioridade frente aos outros professores que só reprovaram 2 ou 3 alunos.

OS QUESTIONAMENTOS

Os meus alunos reprovados, os comentários dos professores e a reação do meu colega professor de Matemática, fizeram-me refletir e trouxeram vários questionamentos, como: a culpa pelas reprovações era somente dos alunos ou a metodologia utilizada poderia ter contribuído? São os alunos que não aprendem ou são os professores que não ensinam adequadamente? A metodologia que utilizava era uma reprodução da prática dos meus professores ao longo da minha vida escolar? Será que era a correta? Os alunos que passaram, aprenderam Matemática ou apenas decoraram algoritmos e os repetiam de forma mecânica? O material didático, com um breve resumo da teoria, uma fórmula e alguns exercícios resolvidos, foi adequado?

A SITUAÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Na busca de respostas às questões mencionadas, teve início uma trajetória de leituras e discussões durante as reuniões pedagógicas da escola. Já nas leituras iniciais, foi possível encontrar alguns dados importantes sobre o ensino de Matemática, nos quais os resultados de alguns estudos indicavam os baixos rendimentos dos alunos em Matemática. Apontavam ainda, para o baixo conhecimento de matemática pela população. Então, já era possível perceber que o ensino de matemática não estava alcançando os objetivos propostos: desenvolver a autonomia, resolver situações e/ou problemas do cotidiano, enfim, tornar o aluno um cidadão pleno. Vários problemas, dentre eles: a formação dos

ISBN 978-85-7891-007-5

professores, a pesquisa sobre novos métodos de ensino e a elaboração e desenvolvimento de materiais didáticos; mereciam atenção especial. Assim, a consciência da necessidade e da dificuldade de se construir o conhecimento matemático não era nova. Enfrentar a questão era imperativo!

Lidar com a Matemática enseja também o desenvolvimento da capacidade de abstração. O resultado desse desenvolvimento deve contribuir para a aplicação da Matemática em diversas situações da vida do indivíduo. A vida em sociedade cobra um mínimo de conhecimento matemático, sem o qual, a própria cidadania do individuo fica comprometida, pois empreender um negócio, acompanhar a evolução de uma campanha eleitoral, controlar o orçamento doméstico, verificar o rendimento de uma aplicação financeira, interpretar um gráfico de inflação, exige algum conhecimento matemático.

A ORIGEM DO PROJETO

Com esse entendimento, em 1990 iniciei um Curso de Pós-Graduação *latu sensu* promovido pela Fundação Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, concluindo-o em 1991. O curso teve como objetivo qualificar professores de Matemática em uma nova forma de conceber o Ensino da Matemática. Essa nova forma se constituía na Aplicação da Modelagem Matemática.

A turma de professores participantes foi dividida em pequenos grupos e o trabalho foi realizado, conforme as orientações acerca da Modelagem Matemática há época. O tema escolhido pelo grupo foi a ELETRICIDADE COMO FATOR DE INTEGRAÇÃO SOCIAL, pois, após uma visita às vilas da cidade, foi possível observar que várias delas ainda não possuíam eletricidade, causando todo tipo de transtorno aos seus moradores, como problemas de segurança, conservação de alimentos, lazer, entre outros.

Uma pesquisa foi elaborada, na qual as entrevistas com os moradores evidenciaram a baixa auto-estima entre eles, por se sentirem excluídos do resto da população. Conhecendo-se a situação das vilas, buscamos ouvir as autoridades do município em relação aos resultados da pesquisa. Percebemos que o motivo principal para a não instalação da rede de energia elétrica nos bairros era a falta de recursos financeiros. Uma questão se fez presente: Como minimizar os custos do projeto de eletrificação de uma das vilas, para torná-lo viável?

DEFINIÇÕES E CONCEPÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A preocupação maior não era estudar a matemática pela matemática, mas inserida em um contexto, no caso, para resolver um problema social relacionado à implantação da rede elétrica na vila. Essa idéia vinha ao encontro da Modelagem Matemática, pois, segundo BASSANEZI (1994, 2002), ela é o estudo de problemas ou de situações-reais, que atua como uma linguagem utilizada para a compreensão, simplificação e resolução destas situações, visando uma possível previsão ou modificação do objeto estudado.

O modelo matemático é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, que é obtido através do estabelecimento de relações entre as variáveis que são essenciais no fenômeno analisado (BASSANEZI, 1990, 2002).

Segundo JACOBINI (1999), outra característica importante da modelagem no ensino relaciona-se com a necessidade de coleta de dados e da pesquisa sobre o assunto em estudo, sendo essas tarefas realizadas pelos alunos e, em geral, em grupos. Os resultados dessas tarefas e a necessidade de se buscar respostas para as questões levantadas pelos alunos são responsáveis pelas atividades didáticas relativas ao ensino dos tópicos do programa do curso. Esses grupos, no entanto, possuem dinâmicas de trabalho diferentes, ou seja, enquanto alguns avançam rapidamente nas atividades extra-classe, outros não. Como o desenvolvimento do programa de curso depende dessas atividades, esse descompasso entre os grupos dificulta o trabalho do professor.

Sobre a Modelagem Matemática, CALDEIRA (2004) enfatiza a necessidade dos conhecimentos matemáticos para o indivíduo atuar como sujeito de transformação social e, bem como deque essa aprendizagem parta do contexto sociocultural do aluno, proporcionando-lhe o desenvolvimento do pensamento lógico, da criatividade, de aprender conceitos e de construir estruturas matemáticas a fim de compreender a realidade social, histórica e cultural.

Segundo BURAK (2004), a Modelagem Matemática vem ao encontro das expectativas do educando, por dar sentido ao que ele estuda, por satisfazer suas necessidades, seus interesses, realizando seus objetivos. O aluno trabalha com entusiasmo e perseverança, formando atitudes positivas em relação à matemática, ou seja, desperta nele o gosto pela disciplina.

O desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, na perspectiva de BURAK (1998, 2004), sugere cinco etapas: *1) escolha do tema; 2) pesquisa* *exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; 5) análise crítica das soluções.* Essas etapas devem sempre ser encaminhadas levando-se em consideração os dois princípios propostos pelo autor: 1) o interesse do grupo e 2) a obtenção de informações e dados do ambienteonde se encontra o interesse do grupo. Durante todo o processo da Modelagem a postura do professor é primordial, pois ele assume o papel de mediador.

RELATO DA EXPERIÊNCIA DE CONSTRUÇÃO DO MODELO

Entre as diversas questões levantadas na elaboração do projeto, incluiu-se a da iluminação de ruas, objeto deste relato. O objetivo foi encontrar um modelo matemático que relacionasse a distância entre os postes (x), o iluminamento (i), a intensidade luminosa (I) e a altura do poste (h), conforme a Figura 1. Este modelo deve indicar a distância mínima entre dois postes que apresente uma claridade adequada. E assim, determinar se é possível diminuir a quantidade de postes a serem utilizados e, conseqüentemente, os custos de eletrificação da vila.

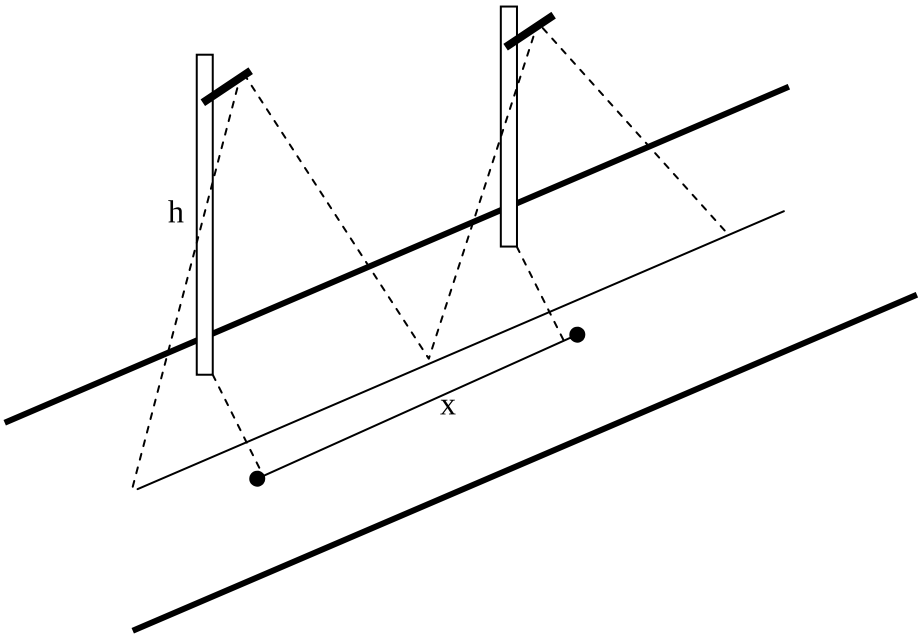


Figura 1

Para o desenvolvimento deste modelo, foi necessário fazer uma revisão na literatura de Física sobre o conteúdo de Fotometria, com conceitos como:

ISBN 978-85-7891-007-5

Fluxo Luminoso (F)

O fluxo luminoso é a quantidade de energia produzida por uma fonte luminosa. A unidade de fluxo luminoso é chamada lúmen, que se define como o fluxo emitido por um foco puntiforme, com intensidade de uma candela, segundo um ângulo sólido de um esferorradiâno. Percebemos bem esta definição, imaginando uma esfera de um metro de raio, tendo no centro o foco de uma candela. Se fizermos, na superfície da esfera, uma abertura de um metro quadrado, a quantidade de luz que passará por esta abertura será de um lúmen.

Intensidade Luminosa (I). Candela

Intensidade luminosa de uma fonte em uma determinada direção é a razão entre o fluxo luminoso (F), que ela emite através de um pequeno ângulo sólido ( ) cujo eixo é a direção considerada, e este ângulo sólido: $I = \frac{F}{\Omega}$.

Ângulo sólido ( )

Considera-se uma superfície esférica qualquer, de raio R, com centro no vértice do ângulo sólido, mede-se a área S da superfície esférica, subtendida pelo ângulo sólido, e obtém-se o valor do ângulo sólido, em esferorradianos, dividindo a área S pelo quadrado do raio, isto é $\Omega = \frac{S}{R^2}$.

Fluxo luminoso total (Ft)

De $I = \frac{F}{\Omega}$ tiramos $F = I.\Omega$. O fluxo total emitido pela fonte correspondente a um ângulo sólido máximo $\Omega_{\max} = 4\pi$ esferorradianos. Logo: $Ft = 4\pi.I$. Esta equação só pode ser usada se a intensidade luminosa da fonte for constante em todas as direções.

Iluminamento (i). Lux

Iluminamento de uma superfície é a razão entre o fluxo luminoso (F), que sobre ela incide, e a sua área (S): $i = \frac{F}{S}$.

Com essas definições claras, iniciamos a construção do modelo:

O cálculo de iluminamento será feito em função da altura da luminária, mas poderia também ser feito em função da distância que o ponto iluminado está da base da luminária, conforme a Figura 2:

ISBN 978-85-7891-007-5

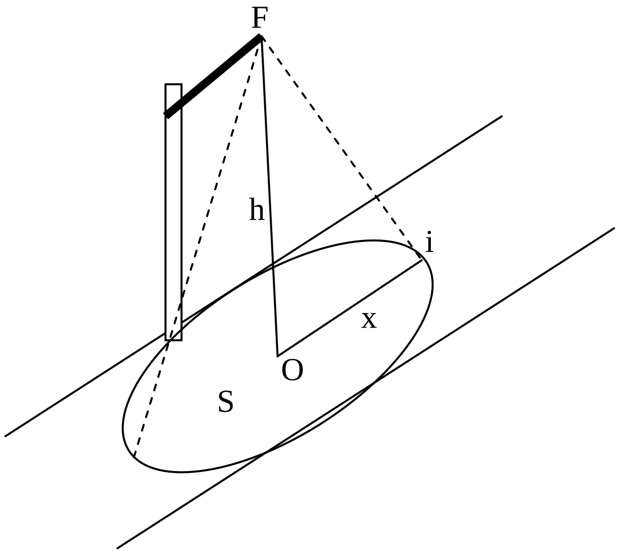
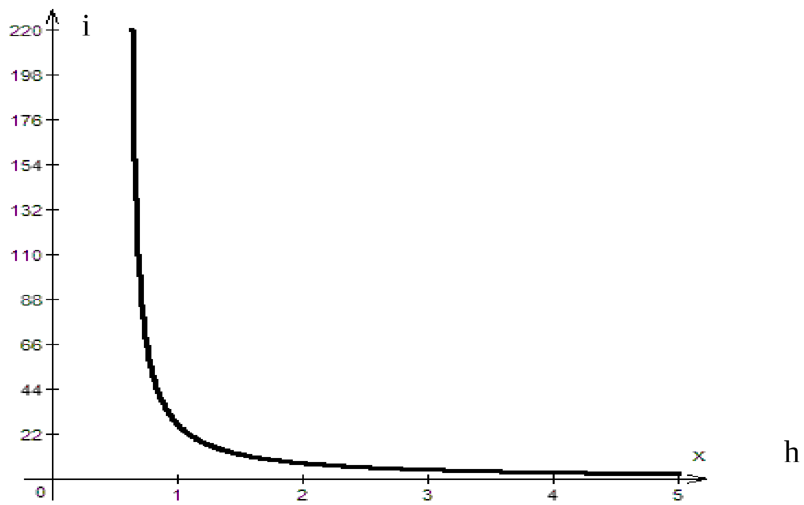


Figura 2

Com a ajuda de um fotômetro (aparelho utilizado para medir a iluminação em um ponto) medimos a iluminação no ponto i, para cada altura da luminária.

h	i
0,5	215
1,0	53,75
2,0	13,43
3,0	5,97
4,0	3,35
5,0	2,15



Pelo esboço do gráfico, já foi possível perceber que a curva é uma hipérbole e a função racional.

Demonstrando

Como i = f(h), temos duas características importantes sobre o gráfico:

a)se $h \to \infty$ então $i \to 0$;

b) se $i \to \infty$ então $h \to 0$.

ISBN 978-85-7891-007-5

Estas características representam uma função do tipo $i = \dfrac{a}{g(h)}$, com g(h) = h temos que $i = \dfrac{a}{h^b}$, sendo *a* e *b* constantes. Esta função pode ser caracterizada como uma **função racional.**

Agora, o próximo passo é encontrar a função, determinando os valores de **a** e **b** através da Regressão Linear.

Como já sabemos $i = f(h) = \dfrac{a}{h^b} = a.h^{-b}$ e calculando o logaritmo de ambos os membros temos: $\ln i = \ln a - b \ln h$

Fazendo: $\begin{cases} \ln i = Y \\ \ln a = A \\ \ln h = H \end{cases}$ **, temos** $\boxed{Y = A - bH}$ **(Equação da Reta).**

Considerando o fluxo luminoso igual a 5400 lumens (fornecido pelo fabricante) de uma lâmpada de 125 w, e o ângulo de incidência constante igual a 60º, teremos:

1°) A constante **a** pode ser calculada fazendo h = 1.

Quando h = 1 e i = 53,75 temos Y = 3,984 ; A = ? ; H = 0.

Substituindo na equação Y = A – bH, temos:

3,984 = A –b.0

A = 3,984

Como lna = A, temos lna = 3,984 e a = 53,75.

h	i	Y = lni	A = lna	H = lnh	a	b
0.5	215	5,3706	3,994	-0,6931	53,75	2
1	53,75	3,9843	3,994	0,0000	53,75	2
2	13,43	2,5975	3,994	0,6931	53,75	2
3	5,97	1,7867	3,994	1,0986	53,75	2
4	3,35	1,2090	3,994	1,3863	53,75	2
5	2,25	0,8109	3,994	1,6094	53,75	2
6	1,49	0,3988	3,994	1,7918	53,75	2
7	1,09	0,0862	3,994	1,9459	53,75	2
8	0,83	-0,1863	3,994	2,0794	53,75	2
9	0,86	-0,1508	3,994	2,1972	53,75	2
10	0,53	-0,6349	3,994	2,3026	53,75	2

ISBN 978-85-7891-007-5

2°) O valor de **b** será uma constante sempre igual a **2**, assim, a equação para cálculos de iluminamento de áreas abertas será:

$$\boxed{i = \frac{a}{h^2}}$$

Na Figura 2, S é a superfície iluminada pela fonte pontual F. O eixo OF do ângulo sólido , determinado por F e S, encontra a superfície no ponto O. A superfície esférica S, subtendida pelo ângulo sólido , foi traçada com centro em F e raio OF = d.

Estamos considerando um ângulo sólido suficientemente pequeno para que se possa confundir a superfície esférica S’ com uma superfície plana. Sendo assim, S e S’ formam entre si o mesmo ângulo , que é o ângulo de incidência.

Podemos, então, escrever que: S’ = S.cos .

Como o ângulo sólido é definido por: $\Omega = \frac{S^{'}}{d^2}$, temos: $\Omega = \frac{S.\cos \text{Є}}{d^2}$ (1)

De $i = \frac{F}{S}$ e $I = \frac{F}{\Omega}$, definições de iluminamento e intensidade luminosa, chegamos a:

$$F = i.S$$
$$F = I.\Omega$$
$$iS = I\Omega$$

Substituindo pelo seu valor, dado pela equação (1), obtemos:

$$IS = S\frac{S.\cos \text{Є}}{d^2}$$

$$\boxed{i = \frac{I.\cos \text{Є}}{d^2}} \quad (2)$$

Comentário importante!

Após deduzir este modelo, descobri que ele já existia e é conhecido como Fórmula de Lambert. Este fato trouxe uma satisfação muito grande, a (re)descoberta.

ISBN 978-85-7891-007-5

Mas o modelo desejado ainda não estava pronto, pois a fórmula a ser empregada, no caso da iluminação de áreas abertas, deveria ser a que permitisse determinar o iluminamento produzido por uma luminária, em cada ponto de uma dada superfície horizontal.

Assim, considera-se a Figura 3, onde F é um foco luminoso, com I candelas de intensidade, iluminado um ponto A. Calcula-se os iluminamentos i, produzidos por F, respectivamente, em um elemento de superfície horizontal e em um elemento de superfície vertical, situados ambos em A.

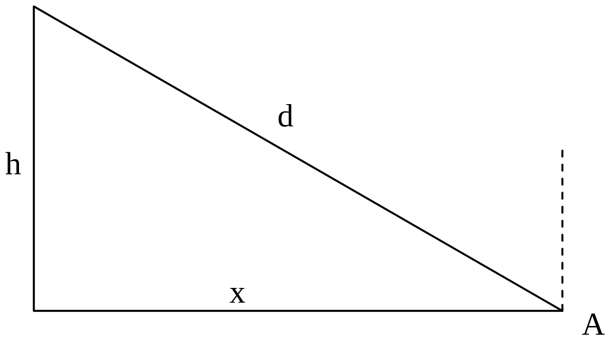


Figura 3

Pela figura, sendo h a altura do foco F acima do plano horizontal do ponto A, temos que: $d = \frac{h}{\cos\theta}$ e, portanto $d^2 = \frac{h^2}{\cos^2\theta}$. Substituindo no modelo encontrado (2) $i = \frac{I.\cos\theta}{d^2}$ encontraremos:

$$\boxed{i = \frac{I.\cos^3\theta}{h^2}}$$

(iluminamento em função da altura da luminária)

Calculo de *i* em função de x

Trata-se aqui do problema da iluminação de ruas e estradas, onde os focos são dispostos ao longo da área a iluminar, segundo uma única fila de postes.

Conforme a Figura 3, x é a distância do ponto de menor iluminamento (0,5 Lux), que seria o luar da lua cheia e céu limpo e o ponto O.

Fazendo $tg\theta = \frac{x}{h}$, temos que $h = \frac{x}{tg\theta}$ e substituído em $i = \frac{I.\cos^3\theta}{h^2}$ vamos encontrar o seguinte modelo:

$$\boxed{i = \frac{I.\cos^3\theta.tg^2\theta}{x^2}}$$

CONCLUSÕES

Neste relato, o modelo encontrado está inserido em um contexto, ou seja, é um modelo que nasceu de uma necessidade de soluções que proporcionassem a minimização dos custos do projeto de eletrificação de uma vila na cidade de Guarapuava-PR.

Nesta experiência, foi possível perceber que aprender matemática não significa receber todos os conceitos prontos. Os conceitos devem ser construídos com base nos conceitos que foram construídos anteriormente. Nesta perspectiva, segundo BASSANEZI (1994,2002), os alunos podem generalizar, estruturar ou desestruturar o universo matemático, para que possam compreender e resolver as situações-problema, que podem ser de natureza matemática ou originadas na realidade de cada indivíduo. Para que isto ocorra, a atividade intelectual do aluno deve, quando possível, aproximar-se da atividade desenvolvida pelos matemáticos ou pelos cientistas, ao longo da história.

Não se tratou aqui de estudar teorias ou técnicas de resolução de modelos matemáticos, pois estas podem ser memorizadas, aprendidas e esquecidas; este relato procurou mostrar que houve um desafio conceitual e um raciocínio lógico e crítico que são, por sua vez, as essências do processo da modelagem matemática.

Referências

BASSANEZI, R. C. **A modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem**. Campinas: Unicamp, 1990.

______.**Dynamics**. Modelagem Matemática, Blumenau, v. 1, n. 7, abr/jun, 1994.

______. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

ISBN 978-85-7891-007-5

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1., 2004, Londrina. **Anais**. Londrina: UEL, 2004. 1

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática e a prática dos professores do Ensino Fundamental e Médio. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais**. Londrina: UEL, 2004.

JACOBINI, O (1999). **A Modelação Matemática aplicada no ensino de Estatística em cursos de graduação**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro.