Modelagem Matemática e Representações Semióticas:

contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Dionísio Burak[1]

Célia Finck Brandt[2]

Resumo: Neste texto nos propomos a apresentar análises e reflexões sobre as possibilidades de contemplar a Modelagem Matemática com uma teoria de representações semióticas. Analisamos uma proposta para o Ensino Fundamental, voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, mediado pela Modelagem Matemática, vivenciada junto a um grupo de professores durante um curso realizado em Faxinal do Céu, no Município de Pinhão, no interior do Estado do Paraná. Elegemos a etapa da Modelagem Matemática, que se refere à resolução dos problemas colocados pelos temas, porque haverá a necessidade do conhecimento de objetos matemáticos e suas conceituações, como consequência dos procedimentos e estratégias, elencados para a solução dos problemas, sem os quais os problemas não poderão ser resolvidos. Analisamos as soluções apresentadas aos problemas colocados pelos temas e os analisamos à luz de uma teoria de representações semióticas, o que contribui para as conceituações e para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois os diferentes registros de representação mobilizam operações cognitiva de formação, tratamento e conversão, colocando em cena o fenômeno da congruência semântica, responsável por um maior ou menor sucesso para estas conceituações.
Palavras-chave: Modelagem Matemática; representações semióticas; pensamento algébrico; Educação Matemática.

Abstract: In this paper we propose to submit analyses and reflections on the possibilities of incorporating into the modeling Mathematics with a theory of semiotics representations. We analyze with a proposal for primary school, dedicated to the development of algebraic thinking, mediated by the Mathematical Modelling, experienced among a group of teachers during a course held in Faxinal do Céu, in the city of Pinhão, in the State of Paraná. We elected the stage of Mathematical Modelling regard to solve the problems posed by themes, because will be need the knowledge of mathematical objects and their conceptualizations as a consequence of the procedures and strategies listed in solving the problems, without then, the problems can not be solved. We analyzed the solutions presented to the problems posed by themes and we analyzed the light of a theory of semiotics representations that contributes to the c conceptualization and for the development of algebraic thinking, because the different records of representation mobilize operations cognitive training, treatment and conversion, putting into play the phenomenon of semantic congruence responsible for a greater or lesser success for these conceptualizations.
Key words: Mathematical modeling; representations Semiotics; Algebraic thinking; Mathematics education.

[1] Professor do Departamento de Matemática da UNICENTRO e do Programa de Pós Graduação, Mestrado em Educação da UEPG. dioburak@yahoo.com

[2] Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino da UEPG e do Programa de Pós Graduação, Mestrado em Educação da UEPG. brandt@bighost.com.br

Neste texto, propomo-nos a apresentar análises e reflexões sobre as possibilidades de contemplar a Modelagem Matemática com uma teoria de representações semióticas. Para tanto, servimo-nos de uma proposta de curso para o Ensino Fundamental, voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico mediado pela Modelagem Matemática, que foi vivenciada com um grupo de professores durante um curso realizado em Faxinal do Céu, no Município de Pinhão, no interior do Estado do Paraná. Elencamos a etapa da Modelagem Matemática, que se refere à resolução dos problemas colocados por temas, visto haver a necessidade do conhecimento de objetos matemáticos e suas conceitualizações, sem as quais eles não poderão ser resolvidos. As soluções apresentadas serão analisadas à luz de uma teoria de representações semióticas.

Este procedimento colocou-nos como exigência evidenciar as três atividades cognitivas que, segundo Duval (1995), são exigidas, de acordo com uma teoria de representações semióticas, para a conceitualização de objetos matemáticos: formação, tratamento e conversão de registros de representação.

Organizamos o texto de forma a apresentar, primeiramente, as ideias centrais que, para Dionísio Burak, caracterizam a Modelagem Matemática e as especificidades das operações cognitivas de formação, tratamento e conversão, com os procedimentos metodológicos exigidos para a sua proposta no processo de ensino, não deixando de evidenciar o fenômeno da congruência semântica decorrente da operação cognitiva de conversão. Em seguida, teceremos algumas considerações relativas à caracterização do grupo envolvido no trabalho, os temas escolhidos e o desenvolvimento da etapa de resolução dos problemas, em que são apresentadas análises das soluções às questões colocadas. Estas análises também se voltam para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nas considerações finais, discutiremos as possibilidades de contemplar o processo de Modelagem Matemática com uma teoria de representações semióticas para a conceitualização de objetos matemáticos e para abarcar o salto semântico existente entre o pensamento algébrico e aritmético, suas propriedades, relações, dentre as quais, igualdade e identidade, e de seus elementos, as variáveis e as incógnitas.

1) Modelagem Matemática: ideias centrais na perspectiva da Educação Matemática e das Ciências Humanas e Sociais

A Modelagem Matemática, de forma simplificada, consiste em uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Como princípio, parte sempre do interesse do grupo, cujas ações, na sua maioria, estão nele fundadas ou a ele se voltam.

Fundamentado em uma concepção construtivista sociointeracionista, o processo da Modelagem Matemática, segundo Burak (1992), pode ser dividido em cinco etapas. Cada uma destas assume importância fundamental no processo da Modelagem, razão pela qual as apresentamos, com algumas de suas ideias centrais.

a) Escolha dos temas pelos alunos, segundo seus interesses, que podem envolver brincadeiras, esportes, atividades industriais, comerciais, econômicas, agrícolas, prestação de serviços e outros. Esse procedimento exigirá outra postura por parte do professor, ao compartilhar com os alunos o processo de ensino, que geralmente é prerrogativa do professor, e também um novo papel, o de mediador entre o conhecimento do aluno e o conhecimento já estabelecido. Este conjunto de ações produz consequências positivas no processo de aprendizagem, pois envolve os alunos de maneira ativa no processo de ensino.

b) Pesquisa exploratória dos aspectos a serem pesquisados sobre o tema escolhido, por meio da qual o grupo busca coletar dados de natureza qualitativa ou quantitativa, aspectos técnicos ou apenas curiosidades. Esta etapa é muito rica, pois cada grupo, conforme o tema, insere-se no contexto. A coleta dos dados, as questões levantadas previamente pelo grupo e a adição de novas situações estão relacionadas a um comportamento mais atento, mais sensível, mais crítico, que são atributos desejáveis em um pesquisador. Tomar contato com outras "realidades", bem como procurar captar suas particularidades e as suas generalidades são aspectos positivos na formação de alunos mais críticos.

c) Levantamento do(s) problema(s), por meio da pesquisa exploratória, conhecimento do contexto no qual o tema se insere e dos vários aspectos nele envolvidos. Esses problemas, a princípio, são genéricos, isto é, não são específicos de matemática, como os encontrados comumente em livros textos. No entanto, no processo de desenvolvimento, vários problemas mais específicos podem surgir, dentre os quais aparecem os que exigirão conhecimentos matemáticos e serão, portanto, denominados problemas matemáticos. Para exemplificar, poderíamos enunciar: "Qual é o custo de uma cesta básica?"; ou: "O salário mínimo vigente é suficiente para prover as necessidades básicas de alimentação de uma família constituída por dois adultos e duas crianças?"; ou ainda: "Qual é o custo de uma casa popular com $60m^2$?". Esses problemas podem ser desdobrados em vários outros, mais específicos, tais como, no caso do custo da casa popular: "Qual é o total e o custo dos tijolos?", "Qual é a quantidade de telhas necessária?", "Qual é o custo da mão de obra?".

d) Resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento do(s) conteúdo(s) matemático(s), no contexto do tema, concomitantemente com a fase anterior. Por exemplo, medidas, operações, equações, sistema de equações, geometria, matrizes e geometria analítica podem ser conteúdos envolvidos nos problemas levantados sobre o tema proposto. É, portanto, nesta fase que se procede ao trabalho sobre os conteúdos relacionados ao tema e, quando se fizer necessário, à construção de modelos. Na perspectiva adotada, o conceito de modelo pode ser entendido como uma representação. Dessa forma, uma tabela de preços ou um gráfico, por exemplo, podem constituir-se num modelo, pois permitem uma tomada de decisão. É uma etapa rica no processo de construção do conhecimento matemático, na qual cai por terra a forma usual de trabalhar matemática na escola. Na Modelagem, os conteúdos são trabalhados em função do problema, diferentemente do Ensino Tradicional, no qual o conteúdo a ser estudado é que determina o problema. Na Modelagem Matemática, um mesmo conteúdo pode surgir várias vezes no desenvolvimento de um tema e em diferentes situações.

e) Análise crítica das soluções encontradas, que são, então, discutidas e analisadas, com o objetivo de verificar a coerência da solução e também sua consistência. Isto porque, muitas vezes, resolvemos um problema ou uma determinada situação-problema sem nos preocuparmos com uma análise mais crítica da solução. Esse novo procedimento permite ao aluno desenvolver o senso crítico, a capacidade de argumentação, a lógica e a adequação da solução à realidade vivida.

2) Operações cognitivas de formação, tratamento e conversão de registros de representação semióticos para a conceitualização de objetos matemáticos

Na etapa de resolução dos problemas e de desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, no contexto do tema, consideramos possível contar com contribuições de uma teoria de representações semióticas para a conceitualização dos objetos de conhecimento necessários para as soluções e as respostas às questões colocadas pelos problemas.

Fizemos isso por julgarmos que esta teoria traz contribuições valiosas para a conceitualização dos objetos matemáticos e, em especial, é capaz de dar conta do salto semântico existente entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico, porque o trabalho envolvendo M.M., proposto aos professores do curso, compreendia o tema “O desenvolvimento do pensamento algébrico”. No entanto, esta opção tem seu custo, visto que, no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos, será necessário considerar tanto as operações cognitivas ligadas à representação desses objetos, como a sua conceitualização.

Segundo Duval (1995), a “semiose” volta-se para a produção e a apreensão de uma representação e a “noésis” volta-se para a apreensão conceitual do objeto. Ambas mobilizarão diferentes atividades cognitivas que as constituem, sendo necessário tanto examiná-las como ligá-las entre si. Como consequência, o processo de aprendizagem deverá contemplar não apenas os conteúdos dos registros de representação, com suas especificidades, limitações, particularidades, entre outros aspectos, mas também o conteúdo do objeto matemático propriamente dito, isto é, a sua conceitualização.

Citemos como exemplo a aprendizagem da estrutura do sistema de numeração, que foi inventado para representar valores numéricos, com uma estrutura específica que compreende base e valor posicional, a qual, por sua vez, é veiculada em diferentes registros de representação do número. Destacamos, dentre eles, a palavra e o numeral arábico, que possuem padrões de organização para compreender a estrutura do sistema de numeração decimal posicional: na palavra, esta estrutura apresenta-se nos sufixos e prefixos, articulados por operações de adição e multiplicação[3]; no numeral arábico, ela está

[3] Por exemplo: a palavra onze possui prefixo “on-*” que é uma deformação do “um” e sufixo “-ze”, que é uma deformação do “dez”, que são articulados entre si por meio de uma adição; já o quarenta possui o prefixo “quar-”, que é uma deformação da palavra “quatro” e o sufixo “-enta”, que é uma deformação do “dez” ; ambos estão articulados por meio de uma multiplicação. Já no numeral 21, o algarismo 2 representa 20 unidades, pois, pela sua posição, ele representa dois grupos de 10 (dezenas); e o algarismo 1 representa 1 unidade. Ambos são adicionados, e a soma representa o valor numérico.* O hífen deve ser empregado para evidenciar o posicionamento do prefixo e do sufixo no interior da palavra que eles formam.

presente nos seus algarismos, que representam os tipos de grupos de dez (dezenas, centenas, milhares, ...), de acordo com a posição desses algarismos no numeral, e também são articulados entre si por meio de operações de adição e multiplicação.

Este exemplo aponta tanto para a necessidade da aprendizagem dos conteúdos dos registros de representação, isto é, o padrão de organização da escrita arábica e da palavra e a forma pela qual eles veiculam a estrutura do SND, como para a própria estrutura do SND, inventada para a representação dos números, de base dez e posicional.

Uma questão importante a evidenciar é que o processo de ensino deve compreender o trabalho com registros de representação, para tornar possível a produção e a apreensão das representações dos objetos matemáticos, bem como a apreensão conceitual destes objetos, apontadas anteriormente, pois segundo Duval (1995), é o trabalho com registros que contempla três operações cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão.

- A formação de uma representação significa uma operação cognitiva que se realiza utilizando-se a língua materna, desenhos, figuras ou fórmulas com signos próprios de uma ciência que não acontece independente do conteúdo a representar e não pode deixar de respeitar regras.
- O tratamento significa uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação, no interior do mesmo sistema semiótico, mobilizando apenas um registro de representação. Exemplo: ½ = 0,5 = 50%. Neste caso, foi efetuado um tratamento no numeral representativo de um número, expressando-o através de uma fração e apresentando-o na forma decimal ou percentual. O sistema semiótico é o mesmo, independentemente de estarem ou não sendo colocadas em jogo especificidades de cada uma das formas do número.
- A conversão significa uma operação cognitiva, porém de outra natureza, que compreende a transformação de uma dada representação em outra, mas agora pertencente a outro sistema semiótico. Essa operação não é uma operação trivial nem cognitivamente neutra, conforme nos alerta Duval (1995). Exemplo: “um número positivo” (língua materna) e “$x > 0$” (linguagem algébrica).

De acordo com Duval (1993), o processo de ensino não pode privilegiar somente o tratamento, pois, se assim o fizer, estará atribuindo demasiada importância à forma, como se ela, por ser responsável pela descrição de uma informação, permitisse a conceitualização. É na conversão das representações de um sistema semiótico a outro que haverá uma operação cognitiva que pode ser descrita como uma mudança de forma, a qual possibilitará a conceitualização dos objetos matemáticos pelos sujeitos aprendentes.

Isso não significa relativizar a importância da forma, visto ser ela a possibilitar a diversidade de diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático, pertencente a diferentes sistemas semióticos de representação e as vantagens possibilitadas por estes registros, dentre as quais destacamos: economia (que é dependente do tipo de registro utilizado numa operação cognitiva de tratamento), permitindo a superação dos limites de uma representação e a rapidez na representação das relações entre objetos; complementaridade de registros, compreendendo os elementos informativos ou comunicacionais que a representação torna possível; conceitualização, implicando a coordenação dos registros de representação.

Por exemplo: a notação arábica é um tipo de registro discursivo[4] que permite tratamento algoritmo (pode ser utilizado para realizar as operações de adição, subtração, entre outras, utilizando as contas de "arme e efetue", por exemplo). Este tratamento algoritmo já não se presta para as palavras que também são registros de representação do número. No entanto, a palavra "dezesseis" explicita com maior transparência a estrutura do SND, no seu sufixo e prefixo, enquanto o numeral arábico 16 não expressa o grupo de dez representado pelo algarismo 1, em virtude de sua posição.

Duval (1995) defende que a compreensão conceitual exige a coordenação de, ao menos, dois registros de representação, e só vai ser possibilitada pela operação cognitiva de conversão. Esta, por sua vez, vai enfrentar o fenômeno de congruência semântica entre

[4] Duval (1995) apresenta uma classificação para os diferentes tipos de registros, de acordo com sua natureza. Os registros podem ser discursivos (linguagem natural, linguagem algébrica) ou não discursivos (gráficos, figuras).

as representações semióticas de sistemas diferentes de um mesmo objeto. É esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou insucessos dos alunos diante das questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou não-congruência observada.

Existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes:

- Correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem. Isto significa que as unidades que compõem um registro devem corresponder às unidades no outro registro pertencente a outro sistema semiótico.
    - Por exemplo: o prefixo e o sufixo da palavra dezesseis (ou seja, as duas unidades significantes deste tipo de registros) correspondem, respectivamente, aos algarismos 1 e 6 do numeral arábico (neste caso as duas unidades significantes deste tipo de registro). Assim: 16 → **dez***esseis*. Neste caso, o algarismo 1 não explicita o grupo de dez.[5]
    - Igualmente ocorre com o caso da sentença matemática x > 0 em linguagem algébrica e um número positivo em língua materna. Neste caso, eu preciso de duas unidades significantes na linguagem algébrica "> 0" para corresponder a uma unidade significante no registro em língua materna "positivo".

      Assim x $\underbrace{> 0}$ e **um número** *positivo*

- Mesma ordem possível de apreensão destas unidades, nas duas representações.
    - Por exemplo: o prefixo da palavra "dezesseis" localiza-se à esquerda e corresponde ao algarismo 1 do numeral 16, também localizado à esquerda, e o sufixo "-seis" da palavra "dezesseis" está localizado à direita e corresponde ao

[5] Análise apresentada por Brandt (2005).

algarismo 6 do numeral 16, também localizado à direita. Isso significa que as duas unidades significantes dos dois registros localizam-se na mesma ordem, nestes registros.[6]

- Outro exemplo: o produto de um número pela soma de dois outros em língua materna e seu registro associado a x (b + c) em linguagem algébrica. A unidade significante "um número", que aparece em segundo lugar na sentença em língua materna, aparece em primeiro lugar na sentença em linguagem algébrica "a", e a unidade significante "produto", que aparece em primeiro lugar na língua materna, aparece em segundo lugar na linguagem algébrica "*x*". Neste caso, não há congruência semântica.

Assim: **o produto** *de um número* pela soma de dois outros → *a* **x** (b + c)

- Conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada.

- Por exemplo: as palavras "quarenta e seis" correspondem ao numeral arábico 46. Neste caso, as duas unidades significantes da palavra "quarenta", isto é, o prefixo "quar-" e o sufixo "-enta" correspondem a um dos algarismos do numeral: o "4". [7]

Assim: 4 6→ **quar***enta* e seis

Duval (1995) analisa alguns problemas de estrutura aditiva de Gérard Vergnaud para explicitar esse fenômeno. No problema "ganha três, ganha três, então ganha seis", o fenômeno da não congruência não se manifesta, pois as três condições acima apontadas estariam sendo satisfeitas:

Ganha 3 (+3), ganha 3 (+3), ganha 6 (+6).

[6] Idem.
[7] Análise realizada por Brandt (2005).

Já no caso do problema “ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8”, existe a necessidade de mudança de ordem das unidades significantes para expressar os procedimentos de solução, em linguagem algébrica, quer eles sejam um procedimento de diferença ou de complemento. Se a heurística de resolução lançar mão de um procedimento de complemento, a ordem tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência (deve-se aceitar que x + 3 é igual a 3 + x), e a sentença matemática em linguagem algébrica é 3 + ... = 8. Se for resolvido por um procedimento de diferença, a ordem também tem que ser invertida (nesse caso, é necessário a reversibilidade, para aceitar o caminho de volta), e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para isso; e a sentença matemática em linguagem algébrica é 8 – 3 = ...

No caso de problemas, há que considerar o fato de que a sentença matemática em linguagem algébrica será um registro da solução ou dos procedimentos e das estratégias utilizadas para encontrar a solução, porque o foco da atividade algébrica “é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral.” (Booth, 1995, p. 24, apud Coxford; Schulte, 1995). Por exemplo, no problema: “Se um clube marcou x gols e o outro, y gols, quantos gols?” a expressão x + y é o número de gols marcados (solução) e também o procedimento utilizado para encontrar a solução. Por esta razão, identificar unidades significantes nos problemas e fazê-las corresponder às unidades significantes de sentenças algébricas coloca em jogo complexidades que são oriundas da congruência semântica.

Neste caso, a correspondência entre as unidades significantes dos dois registros só pode ser efetuada se x + y for o procedimento (correspondência entre a expressão “um clube marcou x gols” e o termo “x”; e correspondência entre “o outro y gols” e o termo “y) e também for a solução (correspondência com a expressão “quantos gols?”).

Há que considerar, ainda, as estruturas diádicas e triádicas presentes nas relações que se estabelecem entre os objetos e seus registros de representação. Essas estruturas são consideradas com base na dimensão linguística que analisa as representações em relação às suas funções de expressão, tratamento e objetivação. Em se tratando da função de expressão, vale ressaltar que, entre os diversos significantes de um determinado significado, existe uma significação por parte do sujeito em relação a um conceito, tendo por referência um objeto matemático, e neste caso, a relação é triádica. Mas ela pode ser diádica, quando se tratar de signos constituídos por uma referência instituída, como vetores, operadores, entre outros, que não possuem significação.

Nas estruturas triádica e diádica da significância de um signo, as relações entre os elementos constitutivos dessa significância (significante, significado, objeto) podem ser de representação ou de referência. Na estrutura diádica, elas serão de representação dos objetos e, na triádica, de referência ao objeto para os signos, aos quais será atribuída uma significação determinada pelo sistema da língua, ao relacionar o significante e o significado. A referência ao objeto, neste caso, é apenas assegurada no plano do discurso[8]. A Figura 1 explicita essas relações e a estrutura, tanto diádica como triádica, da significância.

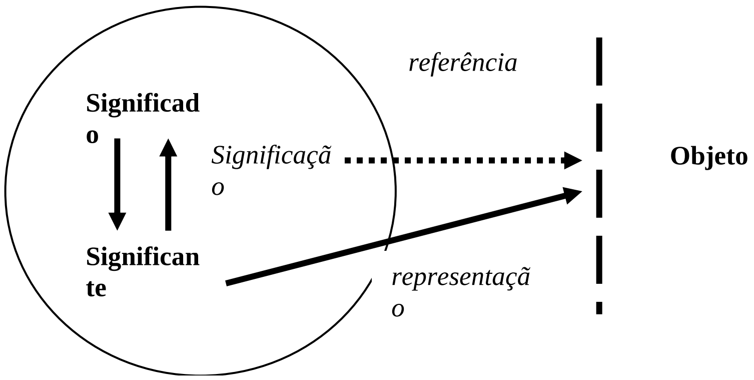


FIGURA 1 - ESTRUTURA DIÁDICA E TRIÁDICA DA SIGNIFICÂNCIA .
FONTE: DUVAL, 1995, p.63

[8] Para Duval (1995) um sistema semiótico precisa cumprir funções discursivas, para que se torne possível o discurso. Essas funções são: função referencial (que designa objetos), função apofântica (expressão de enunciados completos), função de expansão discursiva (um enunciado completo) e função de reflexividade discursiva. Duval (1995) também aponta que um discurso cumpre funções e mobiliza operações e que seu sentido não pode ser analisado somente por critérios linguísticos, pois as formas de expressão são resultantes de operações discursivas mobilizadas que não são, necessariamente, expressas por meio de sinais linguísticos. As unidades de um discurso, que não se baseiam exclusivamente em critérios linguísticos, revelam uma intenção e, por essa razão, o autor afirma que há outro tipo de unidade de sentido intencionada, que está aquém ou além da frase e é dependente do uso funcional desse discurso, ou seja, depende de como e onde ele será usado.

Podemos exemplificar com a palavra “razão”: um significante que pode estar relacionado a um objeto matemático ou a um objeto de conhecimento pertencente a outra área de conhecimento. Para o matemático, “razão” pode ser uma palavra associada a um quociente entre duas grandezas de mesma natureza, ao passo que, para um não matemático, a palavra razão pode ser associada a “estar correto” ou a “racionalidade”. De acordo com a significação por parte do sujeito, esse significante vai estar relacionado com um significado, tendo por referência um determinado objeto.

A relação de referência é fundamental na realização das operações de tratamento e de conversão. Isso porque as transformações inter e intrarregistros, compreendidas nessas operações, terão que ser efetuadas tendo por referência o mesmo objeto matemático, isto é, tanto um registro de representação A como sua substituição, após transformação por outro registro de representação B. Porém, essa substituição não ocorre sem um determinado custo cognitivo, que é causado pelos problemas da congruência semântica. A substituição pode chocar-se com dificuldades, em virtude da diferença semântica. Por exemplo: posso substituir o numeral arábico 13 pela palavra treze, mas esses registros são pertencentes a redes semânticas diferentes, organizados segundo padrões diferentes, de naturezas diferentes (monofuncional e plurifuncional, respectivamente), admitindo, portanto, tratamentos diferentes (algoritmizáveis e não algoritmizáveis).

Substituir o numeral arábico pela palavra pode significar um salto entre duas redes semânticas, de tal forma que o indivíduo não o perceba, nem se for a ele indicado. Como, na matemática, a mudança de registro semiótico é frequente, a substitutividade desempenha papel essencial em relação ao custo cognitivo. A substitutividade, tanto inter-registro como intrarregistro, tem por base a invariabilidade da referência.

A partir do exposto, pode-se inferir que ser referencialmente equivalente não significa ser congruente e que, entre duas representações, será importante considerar não somente a relação de equivalência referencial, mas também a relação de congruência semântica.

Segundo Duval (1988, p. 18),

> [...] não-congruência semântica é uma fonte de dificuldades, independentemente do conteúdo matemático. Uma atividade matemática pode ser bem sucedida se sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulação ou representações congruentes e, a mesma tarefa matemática, dada com uma variante que implica uma manipulação de dados não-congruentes pode conduzir ao fracasso.

Passaremos, a seguir, a apresentar o trabalho de modelagem matemática desenvolvido com um grupo de professores, durante a realização de um curso que compreendeu reflexões sobre o processo de ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A caracterização do curso, a clientela envolvida e o trabalho proposto serão a seguir expostos. Os dados empíricos, oriundos das soluções encontradas para os problemas levantados pelos temas, serão submetidos a análises cujo referencial é uma teoria de representações semióticas, além das operações cognitivas de formação, tratamento e conversão e o fenômeno da congruência semântica.

3. Características do trabalho desenvolvido

O trabalho foi desenvolvido com um grupo de 240 professores de vários Núcleos Regionais de Educação do Estado do Paraná, durante a realização do I Seminário Estadual de Educação Matemática, em Faxinal do Céu, cidade de Pinhão, PR.

O tema, intitulado *Formação do pensamento algébrico*, que nos foi proposto para um trabalho com os professores, levou-nos a refletir sobre como enfrentar o desafio apresentado, utilizando-nos da Modelagem Matemática. Devido às condições do local, à estrutura de horários e à programação definida, alguns aspectos da Modelagem Matemática não puderam ser contemplados e precisaram sofrer alterações.

O trabalho iniciou-se com a exposição, aos participantes, da noção de Modelagem Matemática, o que nos permitiu identificar, por meio de questionamentos, quem não conhecia essa concepção teórica; quem tinha informações sobre ela, ainda que superficiais; quem já havia participado de algum curso relacionado à Modelagem Matemática; e quem desenvolvia atividades que, depois da explanação inicial, foram identificadas com a Modelagem.

Posteriormente, foi realizada uma atividade prática, no âmbito da Modelagem Matemática, que compreendeu o tema "comércio alimentício", escolhido por dois grupos de professores do Ensino Fundamental.

Todo o processo referente a esta atividade foi analisado e refletido à luz de uma teoria de representações semióticas, buscando-se evidenciar as formas e os caminhos a serem percorridos para a apreensão de elementos pertencentes ao campo algébrico, dentre os quais as incógnitas, as variáveis, os procedimentos, os processos e as relações de identidade e igualdade. Igualmente evidenciar a forma de encaminhar um trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico no processo de ensino, utilizando a Modelagem Matemática que, por sua vez, pode ser contemplada com uma teoria de representações semióticas para a conceitualização dos objetos matemáticos e estabelecimento de propriedades e relações. A dinâmica desse desenvolvimento vai significar enfrentar o salto semântico existente entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico.

Esse salto semântico diz respeito aos diferentes significados a serem atribuídos aos registros de representação. Alguns exemplos retirados da aritmética e da álgebra permitem visualizar que, na dimensão cognitiva, isto é, em se tratando de uma semântica cognitiva, ocorre efetivamente um salto. É o caso da notação arábica 23, que representa um número e da notação algébrica − um produto de dois valores desconhecidos, que se fazem representar por letras. A notação arábica não tem o mesmo significado da notação algébrica, pois, se assim fosse, 23 estaria representando o produto de dois por três.

A notação arábica carrega a estrutura do sistema de numeração decimal e posicional e, por essa razão, cada algarismo, de acordo com a posição, multiplicará uma potência de dez (10^0, unidades, 10^1, dezenas, 10^2, centenas), para indicar quantos grupos daquele tipo estão sendo representados. Os resultados dos produtos são adicionados, e a soma resultante será a medida representada.

É importante evidenciar a necessidade de considerar um trabalho voltado para essas diferentes atribuições de significado e, igualmente, entender que o pensamento algébrico não é uma continuidade do pensamento aritmético. Essa crença é responsável pelas dificuldades dos alunos para realizarem operações matemáticas no campo algébrico, como, por exemplo, ao adicionar *a* com *b*, obter *ab*.

O salto semântico evidenciado não significará a incorporação de novos signos de outro sistema semiótico, e, sim, a atribuição de novos significados para esses signos, no mesmo sistema semiótico. Ele também não pressupõe uma hierarquização entre os pensamentos aritmético e algébrico, nem a superação do pensamento aritmético em detrimento do algébrico. O campo algébrico envolverá letras com estatutos diferentes (valor desconhecido, incógnita ou variável) e servirá para representar operações ou relações com utilização dessas letras.

Essas operações ou relações não são da mesma natureza das operações e das relações ocorridas no campo aritmético. Por exemplo, o resultado da adição 2 + 3 pode ser representado por 5, mas o resultado da adição a + b só pode ser representado por "a + b".

Cabe evidenciar a relação entre pensamento e representação. Segundo Duval, as representações semióticas servem para comunicar o que está em pensamento, mas elas também se prestam para as conceitualizações. Isso é importante, pois os objetos matemáticos não têm existência física e só podem ser acessados por meio de seus representantes. No entanto, para serem conceitualizados, precisam ser representados e, para serem representados, precisam ser conceitualizados. Esse paradoxo é específico da área da ciência matemática, que possui objetos ideais, segundo nos alerta Duval (1995). Tudo o que está em pensamento, sejam operações e relações do campo numérico ou algébrico, precisa ser representado e, por essa razão, precisa ser significado de formas diferentes, quer se trate do campo aritmético ou algébrico.

Inicialmente, ressaltamos aos professores participantes do evento que a etapa da pesquisa exploratória não poderia ser realizada, em virtude das condições específicas do momento[9]. O fato, entretanto, não causou maiores dificuldades, tendo em vista que o tema se refere a uma atividade que faz parte da rotina de vida da maioria dos membros dos grupos, os quais frequentam mercados ou supermercados até duas vezes por semana, o que facilitou a simulação dos dados.

3.1 Procedimentos de coleta de dados empíricos e análises

O primeiro passo para o desenvolvimento do tema “comércio alimentício” foi a elaboração de três tabelas que simulavam preços de vários produtos, praticados em três ou quatro supermercados, com marcas e quantidades diferentes.

Em seguida, procedeu-se à constituição de uma cesta básica para uma família constituída de dois adultos e duas crianças e de seu custo total referente aos produtos elencados e à quantidade estabelecida para cada produto. De posse de cada quadro ou lista organizada, propusemos aos grupos a primeira questão: “O salário mínimo vigente é suficiente para prover as necessidades básicas de uma família constituída por dois adultos e duas crianças?”. Os preços das cestas constituídas foram comparados com o valor do salário mínimo vigente na época.

[9] Como o curso foi ministrado aos professores num local isolado (Faxinal do Céu, localizado no município de Pinhão, no Paraná), os professores lá permaneciam instalados durante um período e, então, participavam de palestras, cursos, entre outras atividades. Por esta razão, não foi possível realizar a etapa da pesquisa exploratória relativa ao tema escolhido.

Durante o desenvolvimento do tema, os professores vivenciaram situações de envolvimento com conteúdos matemáticos (adição, multiplicação, divisão) para a elaboração das tabelas e de outros conteúdos matemáticos, como subtração e porcentagem, despertados em virtude de outros problemas levantados, tais como: Qual é o custo da cesta mais barata? Qual é o custo da cesta mais cara? Qual é a diferença? Qual é o custo da cesta básica mais barata que se poderia formar? Seria conveniente? Os professores puderam também perceber a importância e a riqueza contida numa atividade dessa natureza, ao permitir comparações, por meio das quais é possível levar os alunos a desenvolverem o pensamento matemático.

Um exemplo típico que envolve comparação é: “Um pacote de 5 kg de arroz custa R$ 3,25 no supermercado A e um pacote de 1 kg, do mesmo arroz, custa R$ 0,69 no supermercado B. Assim, se a família consome 10 kg, faria economia, se comprasse dois pacotes de 5 kg no supermercado A, em vez de 10 pacotes de 1 kg no supermercado B?”.

Esta situação pôde ser explorada de modo a envolver outras relações e raciocínios multiplicativos, como por exemplo: “Se a família consumisse 8 kg por mês, qual seria a diferença, comprando 1 pacote de 5 kg mais 3 pacotes de 1 kg ou 8 pacotes de 1 kg? Quais as possíveis causas da diferença?”.

As diferentes situações vivenciadas e as diversas questões levantadas podem ser, nesse momento, objeto de análises e reflexões referentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A ideia do pensamento algébrico pode ter seu início desde o Ensino Básico, e esse tema parece favorecer isso. Isso quer dizer que, ao trabalhar com produtos como o arroz, a batata, o feijão, o trigo e outros, vendidos em quilogramas, pode-se usar 5a para significar 5 quilogramas de arroz, 2f para significar 2 quilogramas de feijão, e assim por diante.

Neste momento, as primeiras análises podem ser realizadas à luz de uma teoria semiótica de representações, visto que lançamos mão de tipos de registros pertencentes a um sistema semiótico de representação para representar os dados do problema com o qual nos defrontamos.

Este procedimento pode ser caracterizado como uma operação cognitiva de formação de registros e, de acordo com o sistema semiótico utilizado, deve respeitar regras. As letras utilizadas para a representação dos dados assumem, no campo algébrico, primeiramente a função de incógnitas e depois a função de variáveis, considerando que os registros serão representativos dos dados de todos os problemas.

É importante ressaltar que este procedimento compreende um trabalho no campo da álgebra, uma vez que, segundo Mac Lane e Birkhoff (1967, apud Coxford; Schulte, 1995, p. 9), “a álgebra é a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representam números. [...]”. Resta analisar que sentido e significado essas letras assumem num determinado contexto específico.

Lembramos que toda sentença que apresenta letras pode ser interpretada de formas diferentes, de acordo com o propósito a que se destina. Assim, podemos ter a representação de uma fórmula $A = b \times h$ (para expressar a área de um retângulo de dimensões de medida b e h), ou de uma equação, como, por exemplo, $3x = 6$, ou ainda a representação de uma identidade $\operatorname{sen} x = \cos x . \operatorname{tg} x$, ou mesmo de uma propriedade $1 = n . (1/n)$.

Isso é importante no sentido de considerar que nem sempre as sentenças que apresentam letras podem ser substituídas por números, o que pode representar uma grande confusão em termos de atribuição de sentido e significado. Isto porque as letras podem assumir diferentes valores numa sentença, da mesma maneira que podem representar números e/ou pontos, por exemplo, ou medidas de segmentos (AB = BC). Podem também indicar proposições lógicas (p, q), matrizes, vetores e até operações como, por exemplo, 2 * 3, em que * vem a representar uma operação qualquer: adição, subtração, multiplicação, entre outras.

O exposto acima leva-nos a considerar, em se tratando do desenvolvimento do pensamento algébrico, resultados de pesquisas que apontam o salto semântico existente entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico.

Esse salto semântico significa entender que, no campo aritmético, o resultado de uma adição pode ser expresso por um número que representará sua soma, como, por exemplo: 5 + 3 = 8. No entanto, no campo algébrico, a expressão “a + b” vai significar tanto o procedimento como a solução. Feito isso, o trabalho volta-se para a manipulação da sentença que expressa as relações entre os dados do problema. Devemos lembrar que, se este aspecto não for considerado, não poderemos atribuir significado a erros cometidos pelos alunos, que podem julgar ser necessária, como acontece na aritmética, uma resposta única, indicando “ab” como resultado de “a + b”.

É nesse salto semântico que podemos também identificar uma operação cognitiva de conversão, abordando uma teoria de representações semióticas. Isso porque a sentença matemática que se obtém para um determinado problema pode significar, em determinado momento, tanto a solução como um procedimento. No caso em questão − da sentença que expressa o valor total a pagar, dependendo do preço unitário de cada produto −, representa o procedimento através do qual se poderá obter a solução do problema após atribuição do valor numérico da cada letra da sentença.

Ao procedermos desta forma, estaremos transitando entre dois sistemas semióticos de representação: a língua materna e a linguagem algébrica, e é necessário aceitar ou admitir que a resposta encontrada indique a expressão que permitirá encontrar o valor numérico que significará a resposta para o problema. A expressão geral constitui, provisoriamente, uma solução que será dependente dos valores numéricos que poderão assumir as diversas letras utilizadas.

Será importante, nesse sentido, em se tratando de uma operação cognitiva de conversão, proceder com variações num dos registros semióticos de representação e verificar as variações concomitantes no seu registro associado. É este procedimento, de natureza metodológica, que caracteriza o processo de conversão e pode compreender a coordenação pelo sujeito aprendente. É importante levar em consideração esta exigência, a fim de não consolidar uma simples atividade de decodificação que não leva à conceitualização. Como exemplo, propomos a alteração das quantidades de cada produto ou o acréscimo de outros. Essa alteração provocará mudanças nas sentenças matemáticas em linguagem algébrica, construídas para representar o custo de uma cesta básica. Cada alteração nos valores da tabela provocará uma alteração num outro registro, pertencente a outro sistema semiótico a ela associado, isto é, a sentença matemática representativa do preço total.

Prosseguindo com a busca das soluções aos diversos problemas, podem-se organizar os dados de outras formas, a exemplo da tabela a seguir, relativa ao consumo de quatro famílias em um mês:

Família	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Batata (kg)	Trigo (kg)
A	10	6	5	10
B	12	9	3	6
C	8	6	4	8
D	10	8	6	10

As mesmas informações podem ser expressas por meio da linguagem algébrica. Nesse sentido, o consumo das famílias pode ser representado por:

- consumo da família A

$\boxed{10a + 6f + 5b + 10t}$

- consumo da família B

$\boxed{12a + 9f + 3b + 6t}$

- consumo da família C

$\boxed{8a + 6f + 4b + 8t}$

- consumo da família D

$\boxed{10a + 8f + 6b + 10t}$

Ressalta-se, neste momento, a congruência semântica entre os registros dos dados na tabela e a representação por meio da linguagem algébrica. Os dados na tabela encontram-se na mesma ordem, existindo a correspondência semântica terminal, isto é, 10 kg de arroz são representados por 10a, e há correspondência entre as unidades de significado (para cada item da tabela, um registro na linguagem algébrica). Isso é importante evidenciar, para destacar o grau de facilidade em circular entre as duas formas de representação.

Para obter a quantidade de cada produto comum consumido pelas famílias, em vez de simplesmente adicionar 10+12+8+10=40 e fornecer a resposta 40 kg de arroz, poder-se-ia adicionar cada "produto" comum das famílias.

$$\boxed{\begin{array}{c} 10a + 12a + 8a + 10a = 40a \\ 6f + 9f + 6f + 8f = 29f \\ 5b + 3b + 4b + 6b = 18b \\ 10t + 6t + 8t + 10t = 34t \end{array}}$$

A congruência semântica também pode ser apontada se a leitura dos dados da tabela for feita na vertical.

Aqui entra em jogo o foco da atividade algébrica, que diz respeito aos procedimentos e a suas regras. Em se tratando de uma teoria de representações semióticas, estaremos diante de uma operação cognitiva de tratamento. Assim, há a possibilidade de que somas de termos de mesma natureza resultem numa sentença final, que constituirá a resposta do problema.

Parece ser simples e trivial que a sentença 40a + 29f + 18b + 34t constitua a solução do problema, mas não é. Os alunos poderão buscar respostas únicas, em virtude de seu pensamento aritmético caracterizado pelo fechamento, diferente do pensamento algébrico. Por exemplo, 5 + 3 (processo) = 8 (solução) e a + b (procedimento e solução). Se isso acontecer, é importante haver o reconhecimento, por parte do professor, de que a natureza do erro advém do salto semântico entre o foco da atividade aritmética e da atividade algébrica. De posse do conhecimento da natureza do erro de seus alunos, o professor poderá melhor encaminhar seu trabalho.

Outra questão diz respeito à não congruência semântica. A tabela dispõe os dados de modo a fornecer o gasto por família e o gasto por produto. O gasto total das famílias, representado pela sentença 40a + 29f + 18b + 34t, não pode ser retirado da tabela. Um dos critérios exigidos para a existência de congruência semântica não é cumprido, isto é, as unidades de significado da sentença solução não possuem correspondente na tabela.

O problema pode sofrer variações para explorar outras operações, como, por exemplo, a subtração:

$$\boxed{12a + 5f + 12f + 10a - 5a - 9f}$$

Neste caso, convém evidenciar que, segundo Booth (1995, apud Coxford; Shulte, 1995), pode manifestar-se uma dificuldade para a simplificação da expressão, em virtude da interpretação do símbolo operatório. Segundo o autor, em aritmética, “símbolos como “+” e “=” são geralmente interpretados em termos de ações a serem efetuadas, de modo que + significa efetivamente realizar a operação, e = significa escrever a resposta" (Ibidem, p. 27). O sinal de igual é, segundo o autor, unidirecional e busca por uma resposta numérica. Para o autor,

> a ideia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição com a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para "escreva a resposta", pode não ser percebida de imediato pelo aluno, embora essas duas noções sejam necessárias para a compreensão algébrica. (Ibidem, p.28) .

Na operação cognitiva de tratamento, poderemos propor o procedimento de reunir incógnitas de mesma natureza para somar ou subtrair, como, por exemplo: 12a + 10a - 5a + 5f + 12f - 9f, e, após, realizar a redução ou as operações indicadas, obtendo 17a + 8f. No entanto, há que considerar resultados de pesquisa que se referem à representação dos símbolos pelos alunos, que os levam a cometerem erros. Podemos citar, por exemplo, o resultado notadamente admitido, por eles, de 25af para a adição de 17a + 8f. Esse erro é atribuído à interpretação incorreta para o símbolo operatório que, na maioria das vezes, é associada à ação efetiva associada ao símbolo da adição, advinda do pensamento aritmético de juntar. O erro também pode ser interpretado como a transferência, segundo Matz (1980, apud Coxford; Shulte, 1995), da justaposição para este tipo de adição, assim como ocorre com as representações de frações mistas $2\frac{1}{2}$, que representam a adição de duas unidades inteiras com metade da unidade, logo $2+\frac{1}{2}$. Esta justaposição também está implícita na notação arábica dos números, em virtude da estrutura do sistema de numeração utilizado, compreendendo uma base dez e o valor posicional, como, por exemplo: 53 = 5d + 3 u.

Essas atividades começarão a desenvolver no aluno a ideia do pensamento algébrico; destacamos, contudo, que será conveniente, no início da aprendizagem, representar termos como 5a em 5 x a, com o objetivo de impedir a transferência do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, tal como no caso da justaposição. Isso porque existe o salto semântico a ser considerado, que vai requisitar uma estrutura tríade da função da expressão de uma representação. Essa estrutura tríade, por sua vez, vai colocar em jogo os significantes ligados aos significados atribuídos de uma significação, por parte do sujeito aprendente, tendo por referência um determinado objeto matemático.

No caso em questão, “a” é um registro de representação relativo ao preço de um quilo de açúcar, “5 x a” é o preço a pagar por 5 quilos de açúcar, e é esta significação que deverá ser atribuída pelo sujeito no momento da formação das expressões que envolvem os dados do problema. Estes encaminhamentos, próprios das etapas previstas para um trabalho envolvendo Modelagem Matemática, mostram-nos as possibilidades de conceitualização dos objetos matemáticos envolvidos.

Dependendo do nível de escolaridade dos alunos, o professor poderá aprofundar as ideias, propondo, por exemplo, generalizações, isto é, em vez de referir-se a um determinado produto, como o arroz, irá reportar-se mais genericamente a uma variável x qualquer, que possa representar e possibilitar outras operações, como o produto de 3x por x, pois com arroz não tem sentido $3a \cdot a = 3a^2$.

Este procedimento é importante para conduzir à diferenciação entre letras e variáveis. No início, atribuir letras que representam as iniciais dos produtos a que se referem pode ser um caminho para atribuição de significações aos registros de representação. No entanto, essas iniciais têm que ser substituídas por outras, para que o aluno seja levado à interpretação das letras em álgebra, principalmente porque é necessário induzir o aluno a um referencial numérico no momento de interpretar as letras. No caso em questão, “a” representa o preço de um quilo de arroz e não o próprio quilo de arroz.

Essa atribuição de significação, acompanhada de sua interpretação numérica, possibilitará que os alunos diferenciem letras que representam números de letras que representam variáveis, as quais podem assumir diferentes valores; e também poderá fazer com que eles atribuam significado numérico para uma letra, a ponto de afirmar ser possível a igualdade $x + y + z = x + p + z$ quando $y = p$.

Se os alunos forem levados a atribuir letras de acordo com as iniciais das palavras ou de situações representadas, encontrarão dificuldades para admitir a identidade acima e outras que surgirão em qualquer ramo da matemática.

Assim, x passa a ser a letra que permite outras operações, como a multiplicação, a divisão, a potenciação, entre outras.

Ainda no Ensino Básico, poder-se-ia trabalhar o valor numérico de uma expressão algébrica (não necessariamente deve ser este nome), valendo-se da tabela de preços. Poderíamos, no contexto de um trabalho com Modelagem Matemática, continuar levantando questões pertinentes à situação em questão. Assim, perguntaríamos: "De que forma poderíamos apresentar o gasto consumido, com açúcar e feijão, por todas as famílias?".

Poderemos esperar, de acordo com esta pergunta, a busca por valores numéricos para responder à questão, sem que os alunos compreendam que a expressão $17a + 8f$ é a resposta a ser dada para a pergunta. Então, atribuímos valores para o preço do açúcar e do feijão, como, por exemplo, $a = 0{,}65$ e $f = 0{,}80$, e mudamos a pergunta, questionando o preço a ser pago na situação acima explorada.

Interessante será considerar o que nos colocam Chalouh e Herscovics (1975, apud Coxford; Shulte, 1995) em relação ao dilema nome-processo. Apontam que, numa equação do tipo área = b x h, o primeiro membro da igualdade expressa o nome e o segundo o processo. Por essa razão, podem ocorrer respostas incorretas do tipo 25af para a pergunta relativa ao gasto com açúcar e feijão, com a interpretação de que se estaria gastando "25 com açúcar e feijão", revelando-se, então, a necessidade de um nome para o processo $18a + 7f$.

Em se tratando de uma teoria de representações semióticas, cabe lembrar que estas dificuldades serão enfrentadas na operação cognitiva de tratamento, pois os alunos estarão realizando transformações no interior de um mesmo sistema semiótico de representação. E ainda, neste aspecto, poder-se-ia oportunizar uma atividade bastante rica, envolvendo a decomposição decimal e não decimal, enfrentando-se, ao mesmo tempo, o problema da justaposição.

Exemplo: Tomemos as expressões

17a e 8f. Uma decomposição possível é:

17a = 10a + 5a + 2a e 8f = 5f + 2f + f (10a + 5a + 2a) + (5f + 2f + f)

Substituindo a e f por seus valores respectivos, temos:

(10 . 0,65 + 5 . 0,65 + 2 . 0,65) + (5 . 0,80 + 2 . 0,80 + 0,80) =

(6,5 + 3,25 + 1,30) + (4,0 + 1,60 + 0,80) = 17,45; ou ainda:

(17. 0,65) + (8. 0,80) = 11,05 + 6,40 = 17,45

No entanto, será necessário primeiramente levar os alunos à compreensão de que um termo do tipo “10a” é a representação simplificada da expressão “10 x a”. Seguindo as etapas da Modelagem Matemática, poderíamos, inclusive, apresentar outros questionamentos relativos ao tema, a exemplo de:

a) Como escrever 6 vezes 7 em aritmética?

b) Como escrever 2 vezes x?

c) Como escrever a vezes b em linguagem da álgebra?

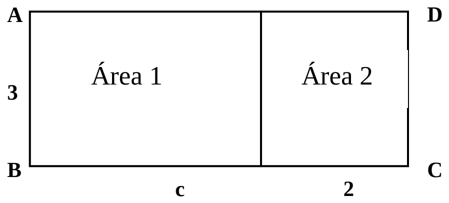
d) Para não confundir o sinal de vezes com a letra x, represente o produto, justapondo, lado a lado, os termos: 8 x x = 8x.

e) É possível fazer o mesmo para representar a multiplicação de dois números? Por quê?

f) Lembrando que 1 x 3 = 3, como poderemos escrever 1 x x?

g) É possível afirmar que a x 3 = 3a? Justifique sua resposta.

h) Na figura abaixo, represente as áreas



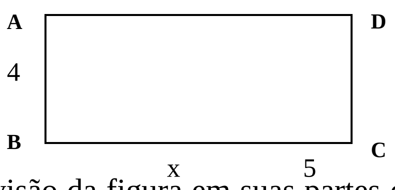
Área 1 =

Área 2 =

Área total do retângulo ABCD =

Em se tratando de uma teoria de representações semióticas, poderíamos afirmar que as questões propostas representam operações cognitivas de formação, pois solicitam a formação de registros de representação para expressar as relações propostas entre valores numéricos e entre valores numéricos e letras. Os diferentes significantes não são utilizados somente para representar essas relações, mas seguem a estrutura triádica, na qual os significantes representam registros de um determinado significado (área), e, em relação à significação, contemplam desafios cognoscitivos, ao propor ora números, ora números e letras representativos das medidas dos lados das figuras geométricas, para as quais solicita a obtenção da medida da área. Também estaria sendo contemplada a operação cognitiva de tratamento, pois os desafios contemplam as transformações no interior do mesmo sistema semiótico.

Esta questão poderia compreender outro tipo de desafio, propondo-se a obtenção do cálculo da área da figura, sem explicitação das áreas parciais.



Eliminando-se a divisão da figura em suas partes constituintes, estar-se-á propondo a formação da sentença que representa a área, de forma a envolver uma multiplicação por uma adição, o que exige os parênteses. Esta proposta representa, novamente, enfrentar o salto semântico entre o pensamento aritmético e o algébrico, com acréscimo de outro sistema semiótico da representação (a linguagem geométrica). Isto porque, segundo Booth (1995, apud Coxford; Shulte, 1995, p. 33), “um dos aspectos em que as idéias aritméticas dos alunos podem influir em seu desempenho é o uso dos parênteses. As crianças geralmente não usam parênteses [...] porque acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados”.

Este resultado de pesquisa auxilia-nos a interpretar erros do tipo 4 x a+ 5, significando que o aluno acredita que esta sentença traduz a sequência de operações por ele pensada, isto é, a adição de a com 5, primeiramente, e sua multiplicação por 4, em seguida. Este erro é fruto de uma visão incorreta da representação aritmética, que é transportada para a representação algébrica, significando que, no desenvolvimento do pensamento algébrico, encontramos, muitas vezes, formas de pensamento aritmético, corretas ou falhas.

Outras maneiras de decompor as expressões 17a e 8f poderiam ser usadas e a partir delas far-se-ia um trabalho envolvendo as propriedades associativas, comutativa, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e outras.

Também outros conteúdos podem ser trabalhados como, por exemplo, equações simples do 1º. grau, a partir das tabelas, envolvendo pelo menos duas situações interessantes:

a) O produto é determinado.

Um pacote de 5 kg de arroz custa R$ 3,25. Quanto custa um kg de arroz?

Representando 5a como sendo 5 kg de arroz:

$$5a = 3{,}25$$

$$\frac{5a}{5} = \frac{3{,}25}{5}$$

$$a = 0{,}65$$

$$a = \text{R\$ } 0{,}65$$

Ressalta-se, na solução apresentada, a congruência semântica, pois as unidades de significado estão na mesma ordem: existe congruência semântica terminal, e as unidades de significado no problema em língua materna apresentam-se na mesma ordem das unidades de significado da solução em linguagem algébrica.

b) O produto é indeterminado.

Ao trabalhar uma situação na qual o(s) produto(s) não é(são) conhecido(s), pode-se introduzir a ideia da variável x e/ou y, onde x e/ou y significa(m) um produto qualquer.

Segundo Demana e Leitzel (1995, apud Coxford; Shulte, 1995, p. 74),

> [...] é um fato bem conhecido que os alunos têm dificuldades com o conceito de variável e que essa pode ser decisiva para um fracasso em álgebra.[...] a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações.

É possível verificar que esta etapa de um trabalho com Modelagem Matemática é potencialmente uma fonte para as conceitualizações de objetos matemáticos.

A introdução de tabelas para expressar relações generalizadas é uma forma de propiciar que os alunos adquiram prática em escrever expressões. Para tanto, suponhamos a seguinte questão, ainda retirada de uma tabela:

5 kg de certo produto custam R$ 4,00. Quanto custa 1 kg desse produto?

Sendo o produto desconhecido, vamos chamá-lo de x ou y ou z ou w, ou qualquer outra letra.

Devemos lembrar que a letra utilizada para representar a variável pode ser associada a um rótulo, como, por exemplo, 3m significar 3 metros, igualmente quando simplificamos a fórmula da área de um retângulo, escrevendo A = b x h, forma resumida da expressão área = base x altura. Por isso a importância da escolha de letras quaisquer para representação de valores que irão variar de acordo com o contexto ou situação.

Podemos considerar a letra x, então:

$$5x = 4{,}00$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{4{,}00}{5}$$

$$x = 0{,}80$$

$$x = R\$\ 0{,}80$$

A importância da escolha de uma mesma letra em diversas situações deve-se ao fato de que estamos enfrentando saltos semânticos. Neste caso específico, entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico. Em se tratando de uma operação cognitiva de formação, estaremos criando uma situação específica de aprendizagem, na qual x assume um valor único para esta situação específica, devendo, porém, assumir outro numa outra situação, a exemplo de: “6 kg de certo produto custam R$ 12,00. Quanto custa 1 kg desse produto?”

Segundo Booth (1995, apud Coxford; Shulte, 1995, p.31-32):

> mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em “x + 3 = 8”, e não números genéricos ou variáveis como em ‘x + y = y + x.’. [...] Um dos problemas decorrentes dessa visão das letras é que as crianças muitas vezes assumem que letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes. Conseqüentemente, muitos alunos entendem que “x + y + z” nunca pode ser igual a “x + p + z”.

Outras questões poderiam surgir dessa situação. Em vez de simplesmente resolver a equação, o problema poderia ensejar outras questões, tais como: Qual(is) é(são) o(s) possível(is) produto(s)? Qual ou quais são os mercados? Assim, além de encontrar o valor do produto, conhecer-se-ia(m) o(s) possível(is) produto(s).

Conforme o nível de ensino trabalhado, a resolução desta situação pode envolver o trabalho com o conceito de equação, os princípios aditivos e multiplicativos, os processos de resolução e outros aspectos que se fizerem pertinentes.

Se o trabalho estiver sendo realizado com o Ensino Básico (1ª a 4ª séries ou anos iniciais do ensino fundamental), o professor pode valer-se dos vários materiais disponíveis para favorecer a compreensão dos conceitos e das equações, bem como, nas situações acima, do trabalho com o sistema monetário.

Outros conteúdos, como sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis, poderiam ser trabalhados a partir de situações como:

- A diferença entre 1 kg de certo produto e 3 kg de outro é de R$ 0,20. A soma de 1 kg de cada um dos produtos é R$ 1,80. Quais são os possíveis produtos e qual(is) o(s) mercado(s)?

Essas situações podem ser construídas com os próprios alunos ou apresentadas pelo professor, como desafio. A situação proposta foge das questões apresentadas em livros textos, pois é real e faz parte do contexto do tema.

A questão apresenta-se como oportunidade para enfatizar a importância:

a) da compreensão da linguagem corrente e da linguagem matemática;

b) da construção de uma expressão matemática (modelo matemático) que represente a situação envolvida;

c) dos métodos de resolução.

Voltando à situação proposta, podemos chamar de x um dos produtos e de y o outro.

A tradução da linguagem corrente em linguagem matemática (simbólica):

$$\begin{cases} x - 3y = 0{,}20 \\ x + y = 1{,}80 \end{cases}$$

O sistema representa o modelo matemático da situação em estudo.

A resolução do sistema pode ser feita:

1) por métodos analíticos (adição, subtração ou comparação);

2) por método geométrico (gráfico).

Método da Adição.

$$\begin{cases} x - 3y = 0{,}20 \\ x + y = 1{,}80 \end{cases}$$

Multiplicando por (-1) a primeira equação, temos:

$$\begin{array}{r} -x + 3y = -0{,}20 \\ x + y = 1{,}80 \\ \hline / \ \ 4y = 1{,}60 \end{array}$$

Substituindo o valor de y na 2ª equação, temos:

$$\frac{4y}{4} = \frac{1{,}60}{4}$$

$$y = 0{,}40$$

$$y = R\$\,0{,}40$$

$x + 0,40 = 1,80$

$x = 1,80 - 0,40$

$x = 1,40$

x = R$ 1,40

Outros métodos, como os da substituição e da comparação também poderiam ser aplicados.

Convém ressaltar, mais uma vez, a importância de perceber o salto semântico entre o pensamento aritmético e o algébrico, que pode se manifestar no momento da operação cognitiva de formação. Isso porque, para representar as relações entre os dados do problema, será necessário utilizar letras com o estatuto de incógnita. No campo aritmético, essas relações seriam contempladas de forma diferente do campo algébrico. A soma dos preços dos dois produtos pode ser repartida em quatro partes, visto que a diferença apontada leva em conta quatro partes (1 kg de um produto e 3 kg do outro). Assim, 1,80 poderia ser dividido por 4, o que estabeleceria os valores de 0,45 e 1,35. A um dos valores deve ser acrescentada a quarta parte da diferença e, ao outro, deve ser subtraída essa quarta parte, para resultar na diferença de 0,20.

Para uma solução no campo algébrico, essas relações seriam expressas de formas diferentes. As letras entrariam para expressar os preços dos produtos (com o estatuto de incógnitas) e outras operações cognitivas seriam contempladas para representar o valor de 3 kg de um produto e de um kg do outro. A relação 3y já compreenderia esse salto semântico, visto que essa formação, com justaposição do algarismo e da letra, representaria a multiplicação de 3 por y.

Importante será também considerar que a formação da sentença pode revelar a sua forma de resolver o problema e os procedimentos utilizados. Por essa razão, ficará mais difícil formar uma sentença em linguagem algébrica para representar a adição de dois termos, se ele conta na sequência. Ficará muito difícil entender as sentenças utilizadas para representar os dados do problema acima, se o aluno lançar mão de procedimentos de solução baseados num raciocínio aritmético.

Vejamos um exemplo: “a soma de dois números é 10, e a sua diferença é dois. Quais são os números?” Um aluno procede da seguinte maneira para encontrar a solução do problema: se os dois números fossem iguais, cada um seria 5, mas, como existe uma diferença de dois, então somo uma unidade a um deles (5 + 1) e retiro uma unidade do outro (5 – 1). Os números são, portanto, 4 e 6. Transportando este pensamento para o pensamento algébrico, as sentenças matemáticas traduziriam os procedimentos de resolução:

1) Dois números iguais seriam representados por x, levando à sentença: $x + x = 10$ ou $2x = 10$, logo $x = 5$.

2) Somo uma unidade a um deles: $z = x + 1$, logo $z = 5 + 1 = 6$.

3) Subtraio uma unidade ao outro: $w = x - 1 = 5 - 1 = 4$.

Síntese: conjunto de sentenças: $$\begin{cases} x + x = 10 \\ z = x + 1 \\ w = x - 1 \end{cases}$$

Segundo Booth (1995, apud Coxford; Shulte, 1995, p. 35),

> se os alunos têm de aprender (e usar) os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles. Isso requer (a) que o professor reconheça que os alunos podem dispor de um método informal para um dado tipo de problema; (b) que o valor desse método informal para a resolução de problemas simples seja reconhecido e discutido; e (c) que as possíveis limitações do método sejam consideradas, simplesmente tentando-se usá-lo em problemas de mesma espécie, porém mais difíceis.

Nos procedimentos adotados acima, é possível reconhecer operações cognitivas de tratamento, quando as transformações ocorrem no interior do mesmo sistema semiótico de representação e de conversão, no momento em que se transita da língua materna para a linguagem algébrica. Assim, as variações podem ser exploradas.

Ao propor outros métodos, podemos contemplar, no processo, a operação cognitiva de conversão, necessária para as conceitualizações. Vejamos o exemplo do método geométrico:

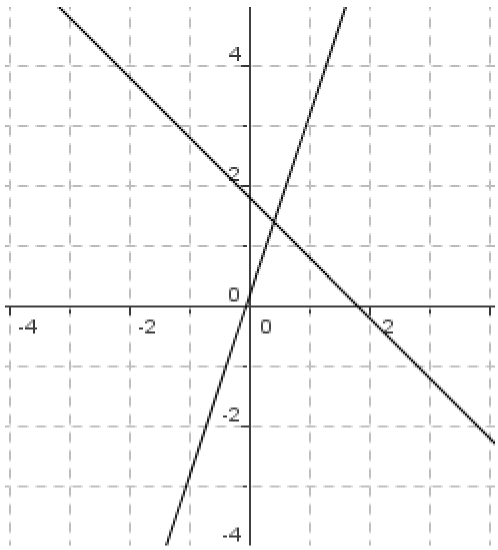
$$x - 3y = 0,20 \Rightarrow y = \frac{x - 0,20}{3}$$

x	0,20	0,40	0,80	1,20	1,40	1,60
y	0	0	0,30	-	0,40	-

$x + y = 1,80 \rightarrow y = 1,80 - x$

X	1,40	1,20	1,40	1,80
Y	0,80	0,60	0,40	0

(0,4;1,4)



Este procedimento prioriza a operação cognitiva de conversão e, para que seja mais bem explorada, torna-se necessário proceder com variações nas unidades significativas pertinentes em um dos registros, pertencente a um determinado sistema semiótico, e verificar as alterações no registro associado, pertencente a outro sistema semiótico.

Assim, poderemos alterar a diferença entre um quilo de certo produto e três quilos de outro. Ou, ainda, o valor da soma de um quilo de cada produto. Estas alterações possibilitariam identificar interferências nas coordenadas do ponto de interseção das retas que representam as funções.

Considerações finais

Os resultados e as análises apresentados compreenderam as formas de articular a Modelagem Matemática enquanto metodologia para o processo de ensino, com uma teoria de representações semióticas que possibilita as conceitualizações que se fazem presentes e que se tornam necessárias para a resolução dos problemas levantados pelos temas propostos.

Nas etapas presentes no processo de Modelagem Matemática, é possível vislumbrar momentos em que os interesses do grupo podem ser valorizados, conforme segue: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s) e situações em que as conceitualizações são necessárias à resolução do(s) problema(s); análise crítica das soluções, o que permite recorrer às operações cognitivas de produção; e tratamento e conversão para dar conta do par semiósis/noésis presente no processo de aprendizagem.

O contexto da Modelagem serve para atribuição de sentido e significação aos conceitos, pois o tema e sua problematização serão responsáveis pelas atribuições de significações ao par significante/significado, tendo por referência um determinado objeto matemático. No caso em questão, apresentamos uma reflexão sobre os significantes pertencentes ao sistema semiótico que utiliza a linguagem algébrica, no sentido de ressaltar as questões presentes no salto semântico que existe entre o pensamento algébrico e o aritmético. Esses pensamentos devem ser levados em conta na interpretação das produções acadêmicas, nos diversos momentos do processo de ensino, no qual estarão sendo contempladas as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão.

O trabalho com Modelagem Matemática pode receber contribuições de resultados de pesquisas referentes às conceitualizações, aos obstáculos epistemológicos, às dificuldades que podem ser inerentes a um tipo específico de sistema semiótico e a outros que se originam oriundam do processo de conversão, que significa transitar entre sistemas semióticos diferentes. Também pode caracterizar pesquisas que venham a auxiliar a interpretar os erros cometidos, trazendo uma luz à organização da prática educativa, no sentido de ajudar os alunos a evitarem ou a corrigirem seus erros e, igualmente, apontar que as ideias no campo algébrico podem parecer simples aos adultos, mas não o são aos sujeitos no início de sua aprendizagem.

As ideias do texto, sem constituir uma apresentação de um receituário, apontaram de que forma o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser beneficiado com uma proposta de Modelagem Matemática e com as contribuições de uma teoria de representações semióticas para atribuição de significações. Nesse sentido, a proposta de expressões algébricas como respostas dos problemas que se colocam pode ajudar os alunos a criar essas significações. O importante foi perceber que os significantes podem pertencer a sistemas semióticos diferentes, por estarem sendo objeto de resolução das problematizações que se colocam em virtude do tema.

O trabalho com Modelagem Matemática, complementado por uma teoria de representações semióticas, auxilia a enfrentar obstáculos cognitivos referentes a: falta de referencial numérico na utilização das letras; percepção de sentenças abertas como incompletas; o dilema nome-processo; a justaposição. Será no enfrentamento destes obstáculos e em suas superações que se fará a possibilidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, que deverá passar por: utilização de letras para representarem quantidades ocultas ou desconhecidas e também para representarem incógnitas; atribuição de significação à justaposição na representação algébrica como representação de uma multiplicação, diferenciando-a da justaposição da notação arábica como adição de valores relativos; atribuição de significação à ordem das operações numa expressão aritmética, a fim de transportar essa significação para as expressões algébricas; e atribuição de diferenciação entre estado e processo, conduzindo à significação das relações de identidade e de igualdade.

Existem estudos como, por exemplo, os de Leitzel e Demana (1995, apud Coxford; Shulte, 1995), que podem contribuir para a superação desses obstáculos, visto que apresentam uma proposta para iniciar os alunos no pensamento algébrico, especificamente nos conceitos básicos da álgebra a partir de cálculos numéricos e resolução de problemas. Tais abordagens vêm ao encontro de nossa proposta e podem ser por ela complementadas. Outros estudos, como os de Lesh, Behr e Post (1995, apud Coxford; Shulte, 1995), voltados para o raciocínio com proporções, mostram a sua importância para o aprendizado da álgebra. Também os estudos de Kieram (1995, apud Coxford; Shulte, 1995), apresentam duas abordagens para o processo de ensino da álgebra: uma delas focaliza as operações dadas (abordagem aritmética) e a outra, as inversas das operações (abordagem algébrica), ambas importantes para enfrentar o salto semântico existente entre pensamento aritmético e algébrico, fonte de obstáculos cognitivos.

Todos os estudos são compatíveis com a proposta da Modelagem Matemática, respaldada por uma teoria de representações semióticas, e tanto a complementam como subsidiam. A Modelagem, por propor o tema e a problematização, que será acompanhada da busca de soluções e sua apreciação crítica; e a teoria de representações semióticas, por propor as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, necessárias para as conceitualizações que se colocam como exigências para as soluções buscadas.

Referências

BRANDT, Celia Finck**.** *Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração.* Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) − Universidade Federal de Santa Catarina − UFSC, Florianópolis, 2005.

BURAK, D. *Modelagem Matemática:* ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) − Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, 1992.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.) *As idéias da álgebra.* São Paulo: Atual, 1995.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. In: ANNALES DE DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, 1., IREM de Strasbourg, *Anais*...1988. p. 7-25.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: ANNALES DE DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, 5., IREM de Starsbourg. *Anais...*, 1993. p. 37-65.

DUVAL, R. *Sémiósis et pensée humaine*: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse, Bern: Peter Lang, 1995.